

---

## Bericht zu den Forschungstätigkeiten im Forschungssemester SS 2023

Thema: **Mathematische Modelle zur Quantifizierung der Auswirkungen des Klimawandels in der Schadenversicherung**

### 1. Einleitung

Der Klimawandel ist zweifelsfrei ein seit Jahren allgegenwärtiges Thema. Die abzusehenden künftigen Veränderungen des Klimas beeinflussen nahezu sämtliche Lebensbereiche. Aus Sicht der Finanzdienstleistungen gilt es insbesondere, die Auswirkungen auf die besonders vom Klima abhängigen Zweige der Schadenversicherung hochzurechnen. Die Vereinigung der deutschen Versicherungsmathematiker, konkreter die **Deutsche Aktuarvereinigung (DAV)**, befasst seit einigen Jahren systematisch mit diesem Thema. Ich bin seit 1993 Mitglied der DAV und 2021 der **AG „Klimawandel - actuarielle Implikationen in der Schadenversicherung“** des Ausschusses Schadenversicherung beigetreten. Diese etwa 30-köpfige AG untergliedert sich in mehrere Unter-Arbeitsgemeinschaften. Meine Arbeiten habe ich in die Unter-AG **„Quantifizierung und Modellierung“** eingebracht.

Die konkreten Zielsetzungen der UAG betreffen die wissenschaftlich fundierte Analyse des Einflusses des Klimawandels auf die Anzahlen und Ausmaße von wetterbedingten Schadenereignissen, unterschieden nach versicherten Gefahren (Sturm/Hagel, Starkregen, weitere Naturgefahren etc.) und Regionen. Die Erkenntnisse sind insbesondere in die Ansätze der Prämienkalkulation und in das Risikomanagement zu integrieren. Die Arbeit in der U-AG gestaltete sich als sehr anspruchsvoll und zeitintensiv.

### 2. Darstellung der Forschungstätigkeiten

#### 2.1 Thematische Einführung und Beschreibung des Vorgehens

Der Ausgangspunkt der entwickelten Modellansätze ist das klassische kollektive Modell der Risikotheorie, das den Gesamtschaden eines Bestands der Schadenversicherung in einer festen Periode beschreibt. Dieses Basismodell wird zwecks Modellierung der Einflüsse des Klimawandels in mehreren Komponenten erweitert. Einerseits ist zur Beschreibung der zeitdynamischen Effekte selbstverständlich eine zeitabhängige Modellierung der Zufallsvariablen erforderlich. Außerdem werden die Schadenvariablen formal nach versicherten Gefahren und Regionen unterschieden. Als Charakteristikum des Modells wird eine die Einflüsse des Klimawandels repräsentierende (univariate) Zufallsvariable eingeführt, die hier als **Klimawandelindikator (KWI)** bezeichnet wird und potenziell sämtliche Schadenanzahl- und Einzelschadenhöhenvariablen beeinflusst. Formal ergeben sich Bayessche Modelle, deren a-priori-Verteilung die Verteilung des KWI ist. Es werden ausgewählte mögliche Klimawandelindikatoren vorgestellt, wobei das methodische Vorgehen und die Modellanwendung eher unabhängig von der konkreten Auswahl des KWI ist und insofern exemplarisch dargestellt wird.

Zur **Modellkalibrierung** werden beispielhafte Ansätze für die Verteilung des KWI und der bedingten Schadenvariablen aufgezeigt und spezielle, z. T. heuristisch motivierte Techniken der Parameterschätzung vorgestellt. Die Parameterschätzungen basieren hinsichtlich der

Schadensvariablen ausschließlich auf meist aggregierten Daten des Gesamtverbands der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV), s. [1] und [2], also nicht auf unternehmensindividuellen Daten. Der Deutsche Wetterdienst (DWD) stellte (öffentlich zugängliche) Daten für klimatologische Komponenten unterschiedlichster Art zur Verfügung. Hinsichtlich der Unterscheidung nach Regionen operiert der GDV mit Bundesländern bzw. einer Aggregation auf zwölf Regionen. Der DWD weist Daten für zahlreiche deutsche Wetterstationen aus. Hier wurde eine grobe Aggregation auf NORD, WEST, SÜD und OST umgesetzt. Darüber hinaus wurden die Daten des DWD so auf Jahresebene aggregiert, dass diese die gleiche zeitliche Dimension wie die jährlichen Schadendaten des GDV besitzen.

Das Vorgehen orientiert sich exemplarisch an der **Wohngebäudeversicherung** und greift explizit - den Ansätzen des GDV-Naturgefahrenreports 2021 und 2022 ([1] und [2]) folgend - die versicherten Gefahren

- Sturm/Hagel
- Starkregen
- weitere Naturgefahren/Elementargefahren

auf. Das methodische Vorgehen hängt allerdings nicht von der versicherten Gefahr ab. Unterschiede ergeben sich allein aus den ggfs. anderen Datenbasen.

Ziel ist es, ein Vorgehen zur Erstellung eines vollständig parametrisierten Gesamtschadenmodells aufzuzeigen. Neben diesem allgemeinen Konzept, das unternehmensindividuell auszugestalten wäre, werden exemplarisch konkrete Modelle auf der Basis der GDV-Daten und ggf. des DWD generiert. Diese Modelle stehen dann für die Zwecke der Simulation zur Verfügung und können sowohl im Kontext der Beitragskalkulation als auch im Risikomanagement - etwa für die Bewertung der im Fokus stehenden (klimabedingten) Großschadenereignisse hinsichtlich Häufigkeit und Schadensausmaß - eingesetzt werden.

## 2.2 Erweiterte Ansätze für Gesamtschadenmodelle

Im Folgenden werden konkrete Ansätze zur Modellierung des Gesamtschadens unter Einbeziehung des Klimawandels vorgestellt. Zwecks Strukturierung der Modelle werden zwei Arten von Modellen unterschieden. Solche Modelle, die die Effekte des Klimawandels nicht (kausal) durch die Einbeziehung klimatologischer Merkmale erfassen, sondern lediglich die Zeit ( $T$ ) als einzige unabhängige (exogene) Variable aufnehmen, werden als „**T-Modelle**“ bezeichnet. In Abgrenzung bzw. Erweiterung der T-Modelle enthalten „**C-Modelle**“ (auszuwählende) klimatologische Merkmale als exogene Variable, die den Gesamtschaden beeinflussen. Da sich die T-Modelle als Spezialfälle der C-Modelle erweisen, können die Darstellungen auf Letztere reduziert werden.

### 2.2.1 Einführung in C-Modelle

Die Modellbildung orientiert sich exemplarisch an der besonders vom Klimawandel betroffenen Wohngebäudeversicherung. Dabei sei

$G$  = Anzahl der versicherten Gefahren

und

$R$  = Anzahl der versicherten Regionen . <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Die GDV-Daten in [1] und [2] beziehen sich auf die drei versicherten Sturm/Hagel, Starkregen bzw. weitere Naturgefahren (Elementar). Unterschieden wird dort nach zwölf Regionen, die im Wesentlichen den Bundesländern bzw. deren Zusammenfassungen entsprechen.

Außerdem bezeichnet die Variable  $T$  das jeweilige (Kalender-)Jahr. Für jede versicherte Gefahr ( $g = 1, \dots, G$ ) und jede Region ( $r = 1, \dots, R$ ) ergibt sich der zugehörige Gesamtschaden im Jahr  $T = t$  durch die folgenden Zufallsvariablen:

$\tilde{N}_{grt} =$  **Anzahl der Kumulschäden**

$M_{grtj} =$  **Anzahl der Einzelschäden** bei dem  $j$ -ten Kumulschaden

$N_{grt} =$  **Gesamtanzahl** der Einzelschäden  $= \sum_{j=1}^{\tilde{N}_{grt}} M_{grtj}$

$X_{grti} =$  **Höhe des  $i$ -ten Einzelschadens**

$S_{grt} =$  **Gesamtschaden**  $= \sum_{i=1}^{N_{grt}} X_{grti}$ .

Die Zusammenfassung über alle Gefahren und Regionen führt auf

$$S_t = \text{Gesamtschaden im Jahr } t = \sum_{g=1}^G \sum_{r=1}^R S_{grt}.$$

Während die Erwartungswerte der kumulierten Gesamtschäden die übliche Additivität aufweisen, ergeben sich in den C-Modellen im Allgemeinen recht komplizierte Varianz- und Korrelationsstrukturen, da sämtliche Schadenvariablen potenziell von dem im folgenden Abschnitt eingeführten Klimawandelindikator abhängen.

Den genannten Zufallsvariablen sind geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilungen anzupassen. Hier werden für die Anzahlverteilungen Delaporte-Verteilungen und zusammengesetzte Poisson-Verteilungen (CP) sowie für die klimatologischen Variablen und die Einzelschäden verschobene Gamma-Verteilungen herangezogen. Diese Verteilungsklassen gelten als relativ anpassungsfähig. Selbstverständlich sind - je nach Datenbasis - auch ganz andere Verteilungsklassen geeignet. Insofern gelten die hier gewählten Ansätze als exemplarisch.

Die C-Modelle weisen substantiell die beiden folgenden Charakteristika auf:

- Es wird eine klimatologische (zufalls-)Variable  $\theta_t$  in die Modellbildung aufgenommen. Ihr Verlauf wird basierend auf Vergangenheitsdaten analysiert und geeignet an zeitdynamische Wahrscheinlichkeitsverteilungen (hier: (verschobene) Gamma-Verteilungen) angepasst. Sie wird nachfolgend als „Klimawandelindikator“ (KWI) bezeichnet.
- Die Verteilungen der einschlägigen Schadenvariablen (Anzahlen, Einzelschadenhöhen etc.) werden von den (zufälligen) Ausprägungen des KWI  $\theta_t$  abhängig modelliert. Formal gehen die (Schaden-)Verteilungen in bedingte Verteilungen über. Ähnlich geht die in klassischen Modellen übliche stochastische Unabhängigkeit in eine bedingte Unabhängigkeit, gegeben  $\theta_t$ , über. Somit ist in die C-Modelle integriert, dass die Schadenanzahlen und Einzelschadenhöhen - sogar verschiedener Gefahren und Regionen - eines Jahres Abhängigkeiten aufweisen, nämlich die gemeinsamen Abhängigkeiten von der Ausprägung von  $\theta_t = \vartheta_t$  im  $t$ -ten Jahr. (Zufallsvariable verschiedener Jahre sind auch in C-Modellen unabhängig.)

## 2.2.2 Einführung des Klimawandelindikators

Den folgenden Modellierungen liegt die vereinfachende Annahme zugrunde, dass es eine (univariate) Variable gibt, die die für die Schadenversicherung einschlägigen mit dem Klimawandel verbundenen Veränderungen signifikant beschreibt. Diese Variable bezeichnen wir

als den Klimawandelindikator  $\theta_t$ . Für diesen KWI gibt es zahlreiche Kandidaten, etwa und naheliegend die weltweiten CO<sub>2</sub>-Emissionen. Hier werden die Betrachtungen auf die folgenden sechs „C-Variablen“ konzentriert:

- Niederschlagshöhe in mm
- Mittlere Tagestemperatur in °
- Maximale Tagestemperatur in °
- Sonnenstunden in h
- Mittlere Windgeschwindigkeit in m/sec
- Maximale Windstärke in m/sec

Für diese Variablen veröffentlicht der DWD regelmäßig Daten für zahlreiche Wetterstationen in Deutschland. Außerdem gibt es bereits speziell auf die Anforderungen der Schadenversicherung ausgerichtete **internationale Klimaindizes** wie den

- Actuaries Climate Index® (ACI) <sup>2</sup>.

Auch hinsichtlich der Auswahl des KWI ist klarzustellen, dass die hier nachfolgend vorgenommene Auswahl nur methodisch-exemplarischen Charakter haben kann. Keineswegs soll ein konkreter Index klar favorisiert werden. Dies ergibt sich allein aus der relativ dünnen und hoch aggregierten (GDV-)Datenlage der Schadenvariablen, die eine fundierte Analyse der Abhängigkeiten der Schäden von den potenziellen KWI ausschließt. Außerdem werden sich bei den konkreten Modellanpassungen recht unterschiedliche Variable als geeignet erweisen, und zwar je nachdem, welche Schwerpunkte hinsichtlich der versicherten Gefahren und Regionen im Bestand vorliegen.

Für die sechs oben genannten vom DWD veröffentlichten Variablen wurde versucht, die Wechselbeziehungen zu den (vorliegenden) (GDV-)Schadendaten zu analysieren. Die Ergebnisse entsprachen mehrfach nicht den zu erwartenden Tendenzen. So wiesen z. B. die mittleren Windgeschwindigkeiten in den letzten gut 20 Jahren in Deutschland eher fallenden Charakter auf, vgl. Abb. 1.

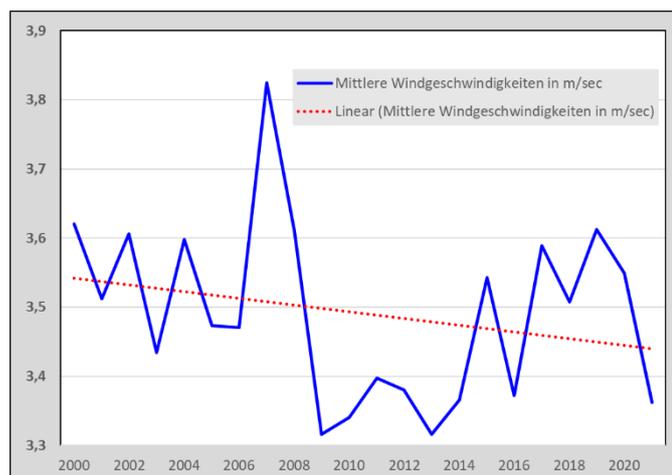


Abbildung 1: Mittlere Windgeschwindigkeiten in Deutschland - 2000 bis 2021

Es ergab sich weiterhin schnell, dass ein regionaler Ansatz von Klimaeffekten eher zu verwerfen sei, da sonst die Gefahr des Overfittings gegeben wäre. Bei der Quantifizierung von Wechselbeziehungen ist zu beachten, dass die Daten bei mehrjährigen Betrachtungen sicher

<sup>2</sup> Der Actuaries Climate Index® (ACI) kombiniert die sechs Merkmale Höchst- und Mindesttemperaturen, Starkregen, Trockenheit (an aufeinander folgenden Tagen), Starkwind und Meeresspiegelhöhen. Er wird vierteljährlich und insbesondere für die USA und Kanada veröffentlicht und zielt auf die Beschreibung von Wetterextremen ab, vgl. [3].

Trends unterliegen, die die üblichen Korrelationskoeffizienten verzerren. Solche Verzerrungen können durch Stationarisierungen, die polynomiale Trends eliminieren, bereinigt werden, vgl. [4].

Die Auswahl des KWI wird sich somit an mehreren Kriterien orientieren. Neben gesundem Menschenverstand hinsichtlich der Kausalität sind (vorsichtige) Korrelationsanalysen und Erfahrungen im Umgang mit alternativen KWI hilfreich. Die Untersuchung der Wechselwirkungen der genannten Variablen mit den einschlägigen Schadenvariablen (Anzahlen/Schadenhöhen) ergab keine klare Tendenz für die Auswahl eines KWI. Deshalb wurden zusätzlich die vom DWD veröffentlichten Anzahlen der Starkregenereignisse (in Deutschland in den Jahren 2001 bis 2021, vgl. [5]) betrachtet. Hier ergaben sich deutlich stimmigere Werte. Die höchsten Wechselwirkungen zeigten sich für die mittleren Temperaturen, sowohl mit und ohne Trendbereinigung, vgl. Abb. 2.

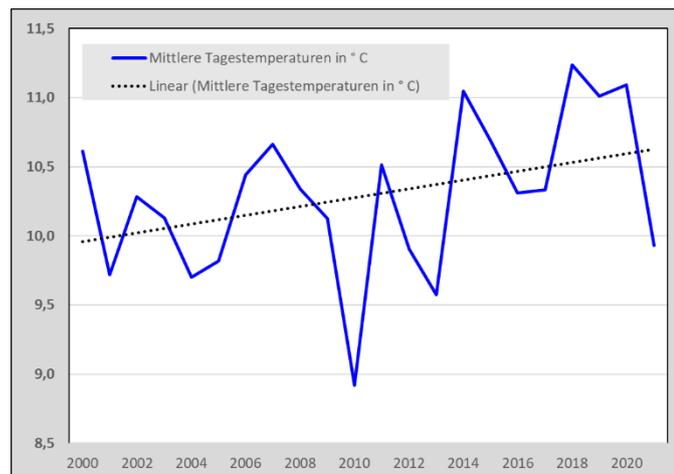


Abbildung 2: Mittlere Tagestemperaturen in Deutschland - 2000 bis 2021

Dieses Ergebnis legte nahe, mit den mittleren Tagestemperaturen als KWI zu operieren. Diese Festlegung ist aber ohne große Bedeutung für das weitere prototypische Vorgehen.

Für die Verteilungen  $\mathbb{P}^{\Theta_t}$  des KWIs werden verschobene Gamma-Verteilungen angesetzt. Sie zeichnen sich vor allem durch hohe Anpassungsgüte an sehr verschiedene Daten sowie durch analytisch geschlossene Darstellungen der Momente, die insbesondere für die notwendigen Parametrisierungen zweckmäßig sind, aus und sind somit als Prototyp prädestiniert. Die sehr unterschiedlichen Klimaeffekte auf die verschiedenen Schadenvariablen sind Grund für eher vorsichtige Modellansätze. Deshalb werden nur solche (Gamma-)Verteilungen herangezogen, deren **Erwartungswerte linear** (mit positiver Steigung) in der Zeit sind. Konkret sei:

$$\Theta_t \sim \nu\Gamma(\alpha, \beta_t, c_t) := c_t + \Gamma(\alpha, \beta_t) \text{ mit } \alpha > 0, \beta_t := \beta_a + t \cdot \beta_b > 0, c_t := c_a + t \cdot c_b. \text{ } ^3$$

### 2.2.3 Anzahlen der Kumulereignisse

Während der KWI überregional und jede versicherte Gefahr übergreifend modelliert wurde, werden die schadenspezifischen Modellkomponenten für jede versicherte Gefahr und für jede Region unterschiedlich modelliert. Grob skizziert werden die Modellanpassungen zunächst nach den versicherten Gefahren unterschieden und innerhalb dieser die regionalen Effekte durch (Marginal-)Faktoren erfasst. Schließlich werden die zeitlichen Einflüsse durch den Ansatz linearer Strukturen (insb. Erwartungswerte) geglättet. Die methodischen Vorgehensweisen ähneln sich für die verschiedenen Variablen, während die konkreten Anpassungen aufgrund verschiedener Datenbasen stark voneinander abweichen können.

<sup>3</sup> Zu Gamma-Verteilungen und verschobenen Verteilungen s. etwa [6], S. 478, und [7], S. 347 bzw. 355.

Die Modellkalibrierung für die Anzahlen der (deutschlandweiten) Kumulereignisse  $\tilde{N}_{grt}$  erfordert - dem Anspruch der C-Modelle folgend - die Berücksichtigung des Einflusses der Ausprägungen des KWI. Für gegebene Realisierungen  $\Theta_t = \vartheta_t$  sind somit den bedingten (Kumulanzahl-) Verteilungen

$$\mathbb{P}^{\tilde{N}_{grt}|\Theta_t=\vartheta_t}$$

geeignete Modellverteilungen anzupassen, deren Erwartungswerte insbesondere linear in  $\vartheta_t$  sind. Hier wurden **dynamische Poisson-Verteilungen** angesetzt, deren Handhabung sich als praktikabel darstellte. Genauer gelte:

$$\mathbb{P}^{\tilde{N}_{grt}|\Theta_t=\vartheta_t} = \pi(\tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t}) \text{ mit } \tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t} := \tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g).$$

Die Faktoren  $\tilde{\beta}_1^g, \dots, \tilde{\beta}_R^g$  repräsentieren die über die Zeit geglätteten **Regionaleffekte**. Sie sind - auch zur eindeutigen Festlegung der Verteilungsparameter - stets geeignet zu normieren.  $\tilde{\lambda}_a^g, \tilde{\lambda}_b^g$  beschreiben überregional den von den Ausprägungen des KWI linear abhängigen (mittleren) **Klimawandel-/Zeiteffekt**. Der Fall  $\tilde{\lambda}_b^g = 0$  korrespondiert damit, dass kein solcher Effekt vorliegt.

Man beachte, dass somit die bedingten Verteilungen  $\mathbb{P}^{\tilde{N}_{grt}|\Theta_t=\vartheta_t}$  Poisson-Verteilungen sind - und diese sind später zu simulieren - während sich die (volatileren) unbedingten Verteilungen  $\mathbb{P}^{\tilde{N}_{grt}}$  als spezielle gemischte Poisson-Verteilungen, nämlich als Delaporte-Verteilungen, vgl. [7], S. 106 u. S. 388, erweisen.

#### 2.2.4 Anzahlen der Einzelschäden im Bestand

Während in Abschnitt 2.2.3 die Kumulschadenanzahlen  $\tilde{N}_{grt}$  deutschlandweit angesetzt wurden, gilt es nun die im Fokus stehenden Anzahlen auf einen konkreten (gegebenen) Bestand eines Versicherungsunternehmens zu beziehen. Der betrachtete Bestand wird dabei im Wesentlichen durch die gegebene Anzahl

$$n_{gr} := \text{Anzahl der Risiken im Bestand bzgl. versicherter Gefahr } g \text{ in Region } r$$

beschrieben. Diese Anzahlen werden vereinfachend als unabhängig von der Zeit  $t$  angesetzt.

Die Gesamtanzahl  $N_{grt}$  der Einzelschäden für jede versicherte Gefahr  $g$ , in jeder Region  $r$  und für jedes Jahr  $t$  ergibt sich als die Summe der Anzahlen der Einzelschäden pro Kumul über alle Kumulereignisse.

$N_{grt}$  ist also eine Zufallssumme mit den stochastischen Komponenten der Anzahl  $\tilde{N}_{grt}$  und den (für feste  $g, r, t$ ) als identisch verteilt angenommenen Anzahlen  $M_{grtj}, j = 1, 2, \dots, \tilde{N}_{grt}$ . Für gegebene Realisierungen  $\Theta_t = \vartheta_t$  werden die genannten Variablen als bedingt stochastisch unabhängig angenommen.

Da in die Anzahlen  $\tilde{N}_{grt}$  der Kumulereignisse bereits der Einfluss des KWI integriert ist, wird vereinfachend darauf verzichtet, dies auch für die Anzahlen  $M_{grtj}$  zu unterstellen. Die zugehörige Modellbildung und die potenzielle Verteilungsanalyse werden dadurch erheblich vereinfacht. Konkret wird erneut ein Poisson-Ansatz verfolgt:

$$\mathbb{P}^{M_{grtj}|\Theta_t=\vartheta_t} = \mathbb{P}^{M_{grtj}} = \pi(\lambda_{grt}^M), \quad j = 1, 2, \dots$$

Der Parameter

$$\lambda_{grt}^M = E[M_{grtj}] = \text{Erwartete Anzahl der Einzelschäden im Bestand pro Kumulereignis}$$

gibt also für jede versicherte Gefahr, jede Region und jedes Jahr die im Bestand zu erwartende Anzahl der Einzelschäden pro Kumulereignis an. Diese Anzahl bzw. dieser Parameter und damit

die Verteilung ist im Modell für jedes Kumulereignis identisch, hat aber selbstverständlich die (relative) Größe des Bestands zu berücksichtigen.

Die einzelnen Anzahlen  $M_{grtj}$  spielen im Übrigen im Vergleich zu deren Summe eine eher untergeordnete Rolle, da die Einzelschadenhöhen (für feste  $g, r, t$ ) als identisch verteilt angenommen werden, vgl. Abschnitt 2.2.5. Für festes  $\tilde{N}_{grt} = \tilde{n}_{grt}$  ergibt sich dann, gegeben  $\Theta_t = \vartheta_t$ , die Verteilung dieser Summe als Faltung und hier wiederum als Poisson-Verteilung:

$$\mathbb{P}^{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_{grt}} M_{grtj} | \Theta_t = \vartheta_t} = \mathbb{P}^{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_{grt}} M_{grtj}} = \pi(\tilde{n}_{grt} \cdot \lambda_{grt}^M).$$

Gegeben  $\Theta_t = \vartheta_t$  hat somit  $N_{grt}$  eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung (CP-Verteilung), vgl. [7], S. 117 ff., nämlich eine solche, deren Summanden auch poisson-verteilt sind. In Kurznotation gilt:

$$\mathbb{P}^{N_{grt} | \Theta_t = \vartheta_t} = CP\left(\tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t}; \pi(\lambda_{grt}^M)\right),$$

wobei der Einfluss des KWI  $\Theta_t = \vartheta_t$  in dem Parameter

$$\tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t} := \tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g),$$

enthalten ist, und wie oben beschrieben nicht auch zusätzlich in  $\lambda_{grt}^M$ . Ähnlich wie in Abschnitt 2.2.3 wird der Parameter  $\lambda_{grt}^M$  hier faktorisiert in Regional- und Zeit- bzw. Klimaeffekte modelliert. Konkret wird der Ansatz

$$\lambda_{grt}^M := \beta_r^g \cdot (\lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g)$$

gewählt. Die Schätzung der Regionaleffekte  $\beta_r^g, r = 1, \dots, R$ , sowie der Parameter der potenziellen Klima- bzw. Zeiteffekte  $\lambda_a^g, \lambda_b^g$  wird Kapitel 2.4 angesprochen.

## 2.2.5 Einzelschadenhöhen im Bestand

Für die Einzelschadenhöhen  $X_{grti}$  werden - aus analogen Gründen wie bei den Modellverteilungen für den KWI - dynamische verschobene Gamma-Verteilungen eingesetzt. Konkret wird die folgende Parametrisierung angesetzt:

$$\mathbb{P}^{X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t} \sim \nu\Gamma(\alpha_{gr\vartheta_t}^X, \beta_{gr\vartheta_t}^X, c_{gr\vartheta_t}^X) = c_{gr\vartheta_t}^X + \Gamma(\alpha_{gr\vartheta_t}^X, \beta_{gr\vartheta_t}^X) \text{ mit } \alpha_{gr\vartheta_t}^X, \beta_{gr\vartheta_t}^X > 0.$$

Grundsätzlich wird für jeden der drei Parameter für jede Gefahr  $g = 1, \dots, G$  ein multiplikativer Ansatz verfolgt, der sich - wie bisher für alle Schadenkomponenten - aus einem Regionalfaktor und einem, den Klimawandel repräsentierenden und von  $\vartheta_t$  abhängigen KWI-Faktor zusammensetzt. Details zur Parameterschätzung werden in Abschnitt 2.4.4 thematisiert.

## 2.3 Daten

Die Grundlage der Kalibrierung der Modellansätze sind geeignete Datenbasen, also hier sowohl für die klimatologischen Variablen (den KWI) als auch die Schadenanzahlen und -höhen.

### 2.3.1 Klimatologische Daten

Für die in Abschnitt 2.2.2 eingeführten potenziellen Klimawandelindikatoren steht eine Fülle von z. T. sehr detaillierten Daten zur Verfügung. Die hier vorgenommenen Modellanpassungen basieren auf Daten, die auf der interaktiven Homepage des DWD generiert wurden, vgl. [8]. Konkret liegen für die sechs o. g. C-Variablen an fixierten Messstationen seit 2000 die mittleren Tageswerte pro Jahr vor. Die Wetterstationen in Hamburg, Köln, München und Berlin wurden als Repräsentanten für die Regionen N, W, S bzw. O angesehen und abschließend in arithmetische

Mittel überführt. Diese Mittelung ist erforderlich, da die Anpassung des KWI an überregionale Daten vorzunehmen ist.

### 2.3.2 Schadendaten

Die Modellanpassungen basieren (mangels besserer Alternativen) auf den z. T. stark aggregierten Daten des GDV. Das Vorgehen der Modellanpassungen hat somit exemplarischen und prototypischen Charakter. Selbstverständlich werden Anwender der vorgestellten Modelle in der Regel über (unternehmens-)eigene Daten verfügen und diese als Grundlage der Kalibrierungen verwenden können.

Die Datenbasis ist durch die Serviceteile der GDV-Naturgefahrenreporte der Jahre 2010 bis 2020 gegeben, vgl. [1], [2]. Diese enthalten insbesondere

- für die Jahre 2010 bis 2020 und
- für die versicherten Gefahren „Sturm/Hagel“, „Starkregen“ und „sonstige Naturgefahren (Elementar)“ und
- 12 Bundesland-Verbünde

Angaben zu

- den **Schadensätzen** <sup>4</sup>,
- den **Schadenhäufigkeiten** und
- den **Schadendurchschnitten**.

Da die GDV-Daten stark aggregiert und unvollständig sind, ergab sich die Notwendigkeit, vor der Anwendung einschlägiger Kalibrierungsmethoden weitere Näherungen („Proxies“) zu generieren. Diese betrafen die absoluten Anzahlen der Schäden und die Anzahlen der versicherten Jahreseinheiten - unterschieden nach versicherten Gefahren, den vier Regionen und den Jahren. Mithilfe vereinfachender Annahmen konnten so z. B. die folgenden Proxies für die absoluten Schadenanzahlen der Jahre 2010 bis 2020 in der Wohngebäudeversicherung für die versicherte Gefahr Sturm/Hagel - unterschieden nach den Regionen N, W, S, O - generiert werden.

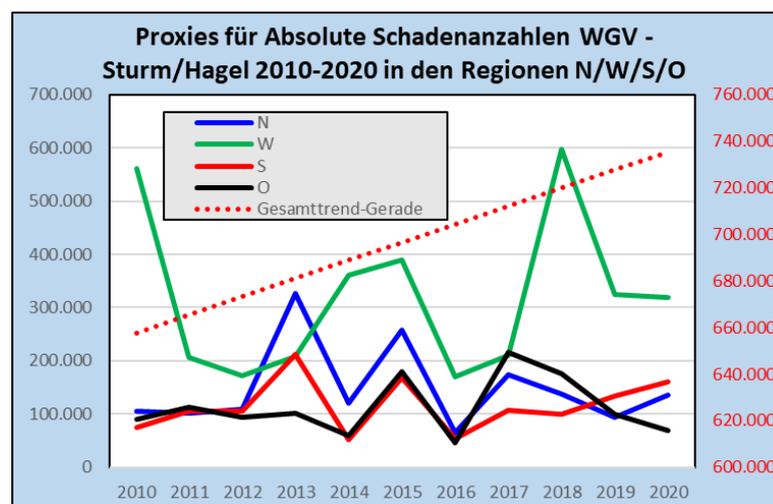


Abbildung 3: Absolute Schadenanzahlen (Proxies) in der WGV für Sturm/Hagel - 2010 bis 2020

Es ist zu erkennen, dass die Entwicklung in den einzelnen Regionen keinen klaren Trend aufweist. Der hier verfolgte Ansatz eines überregionalen Klimateffektes ( $\theta_t$ ) erscheint somit

<sup>4</sup> Der Schadensatz eines Bestands in einer bestimmten Periode ist das Verhältnis des Gesamtschadens zu der kumulierten Versicherungssumme. Details dazu, insbesondere die Abgrenzung zu dem verwandten Begriff des Schadengrades, enthält [6], S. 124 ff.

angemessen, zumal dieser im Mittel den erwarteten steigenden Trend aufweist, s. die „Gesamttrend-Gerade“ in Abb. 3.

Hinsichtlich der Einzelschadenhöhen ist erneut zu betonen, dass keine vollständigen Stichproben vorlagen. Vielmehr enthalten die GDV-Daten im Wesentlichen nur die Schadendurchschnitte - unterschieden nach versicherter Gefahr, Bundesland und Jahr. Durch Gewichtung mit den Proxies für die absoluten Schadenanzahlen wurden die folgenden (approximativen) Schadendurchschnitte in den Regionen N, W, S, O hergeleitet:

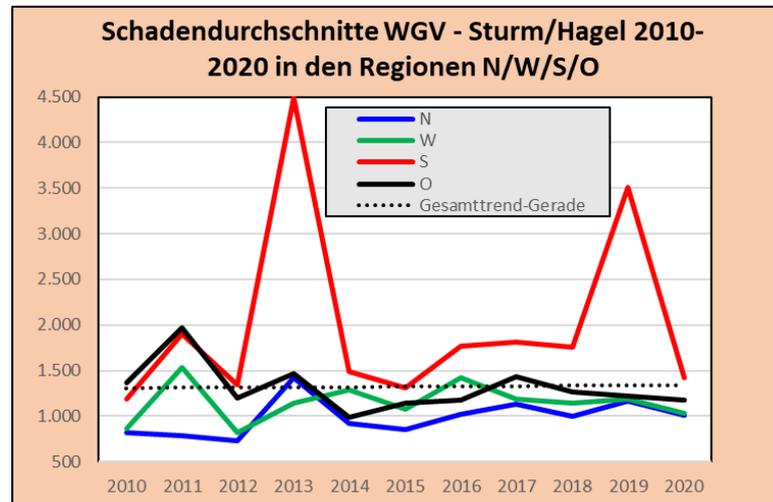


Abbildung 4: Schadendurchschnitte (Proxies) in der WGV für Sturm/Hagel - 2010 bis 2020

Auch hier zeigen sich in den Regionen instabile Gegebenheiten, in der Region O sogar mit fallenden Tendenzen. Der Gesamttrend ist schwach steigend.

## 2.4 Parameterschätzungen

Ansätze der Parameterschätzung haben hier zu berücksichtigen, dass die in der Zeit unterschiedlichen Effekte nicht durch Overfitting zu sehr an die Vergangenheitsdaten angepasst werden und somit rein zufällige zeitliche Schwankungen ausgeglichen würden. Hier wurden im Wesentlichen lineare Trends unterstellt. Diese Trends sind zu konkretisieren und zu parametrisieren.

### 2.4.1 Parameterschätzung bei dem Klimawandelindikator

Nach Abschnitt 2.2.2 unterliegt der Klimawandelindikator  $\theta_t$  einer um  $c_t = c_a + t \cdot c_b$  verschobenen Gamma-Verteilung. Es wird davon ausgegangen, dass die Translationsparameter  $c_a, c_b$  bekannt sind. Entweder sind sie im Fall der nicht verschobenen Gamma-Verteilung beide gleich 0 oder sie wären vorab geeignet zu schätzen. Eine solche Vorabschätzung könnte darin bestehen, für gegebene Datenpunkte

$$(t_i, \vartheta_i), i = 1, \dots, n$$

unter den  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$  Geraden durch je zwei verschiedene Punkte  $(t_i, \vartheta_i)$  und  $(t_j, \vartheta_j), i < j$ , zunächst alle pareto-optimalen Geraden zu bestimmen, d. h. solche, die in allen  $n$  Punkten nicht über den  $\vartheta$ -Werten liegen, und unter diesen dann diejenige auszuwählen, die die Summe der Vertikalabstände minimiert. Auf die Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen bei diesem Vorgehen wird hier nicht näher eingegangen. Es ergaben sich für aber alle C-Variable stimmige Ergebnisse, sodass unterstellt werden kann, dass im Allgemeinen geeignet parametrisierte dynamische Untergrenzen  $c_t = c_a + t \cdot c_b$  vorliegen.

Für die Schätzung der verbleibenden Parameter  $\alpha, \beta_a, \beta_b$  wird ein heuristischer Ansatz verfolgt, der als **angepasste Momentenmethode** bezeichnet wird. Standardmethoden - wie die übliche Momentenmethode - scheiden hier wegen der dynamischen Momente aus. Der angepasste Ansatz betrachtet an den Rändern des Betrachtungszeitraums die Erwartungswerte und zudem eine Art mittlere Varianz. Konkret gilt allgemein (und ohne Beweis) für stochastisch unabhängige Zufallsvariable  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mit zeitlinearen Erwartungswerten

$$\mu_i := E[X_i] = \mu_a + t_i \cdot \mu_b, i = 1, \dots, n,$$

und deterministischen (Zeit-)Punkten  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , dass:

- (1)  $E[\bar{X}_n] = \mu_a + \bar{t}_n \cdot \mu_b$  mit  $\bar{t}_n := \sum_{i=1}^n t_i$ .
- (2)  $M_{b,n} := \frac{1}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}_n)^2} \cdot (\sum_{i=1}^n t_i \cdot X_i - n \cdot \bar{t}_n \cdot \bar{X}_n)$  ist erwartungstreu für  $\mu_b$ .
- (3)  $M_{a,n} := \bar{X}_n - M_{b,n} \cdot \bar{t}_n$  ist erwartungstreu für  $\mu_a$ .

Die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen geht hier nicht ein, aber in das folgende Resultat, das eine erwartungstreue Schätzung der mittleren Varianz ermöglicht, wobei man sich der Einfachheit halber hier auf äquidistante Punkte  $t_i := t_0 + i \cdot \Delta t, i = 1, \dots, n$  konzentriert. Unterstellt man zusätzlich zeitlineare Varianzen:

$$\sigma_i^2 := V[X_i] = \sigma_a^2 + t_i \cdot \sigma_b^2, i = 1, \dots, n,$$

dann ist der Schätzer

$$\Sigma^2 := \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - (M_{a,n} + t_i \cdot M_{b,n}))^2$$

erwartungstreu für die „mittlere Varianz“  $\bar{\sigma}_n^2 := \sigma_a^2 + \bar{t}_n \cdot \sigma_b^2$ . Setzt man in Anlehnung an die Momentenmethode die Erwartungswerte in den Rand(zeit-)punkten sowie die mittlere Varianz gleich ihren erwartungstreuen Schätzern, so ergeben sich die folgenden expliziten (!) Lösungen bzw. Schätzer der unbekannt Parameter  $\alpha, \beta_a, \beta_b$ :

$$\widehat{\beta}_b = \frac{(M_{b,n} - c_b) \cdot (M_{a,n} - c_a) + \bar{t}_n \cdot (M_{b,n} - c_b)^2}{\Sigma^2}$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{\widehat{\beta}_b}{M_{b,n} - c_b}, \quad \widehat{\beta}_a = \widehat{\alpha} \cdot (M_{a,n} + t_1 \cdot M_{b,n} - c_a) - t_1 \cdot (\widehat{\alpha} \cdot c_b + \widehat{\beta}_b).$$

Es ist allerdings zu prüfen, ob für alle  $t_i$  positive Verteilungsparameter  $\widehat{\alpha}$  und  $\widehat{\beta}_a + t_i \cdot \widehat{\beta}_b$  vorliegen. Anstelle dieses heuristischen Ansatzes kommt potenziell auch die Maximum-Likelihood-Methode in Frage, die allerdings wegen der erforderlichen Ableitung der Gamma-Funktion auf die numerisch unhandliche Digammafunktion, vgl. [9], S. 616, führt, weshalb die ML-Methode i. d. R. verworfen wurde.

## 2.4.2 Parameterschätzung bei der Anzahl der Kumulereignisse

In Abschnitt 2.2.3 wurde ausgeführt, dass für die bedingten Verteilungen  $\mathbb{P}^{\tilde{N}_{grt} | \Theta_t = \vartheta_t}$  der Anzahlen der Kumulereignisse dynamische Poisson-Verteilungen mit Poisson-Parameter

$$\tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t} := \tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g)$$

angesetzt werden. (Die Tilde „~“ kennzeichnet den Bezug zu diesen Anzahlen der Kumulereignisse, insbesondere in Abgrenzung zu den Anzahlen  $N_{grt}$  der Einzelschäden.) Zu schätzen sind die Regionalparameter  $\tilde{\beta}_r^g, r = 1, \dots, R$ , sowie die beiden den zeitlichen (Klima-)Wandel betreffenden Parameter  $\tilde{\lambda}_a^g, \tilde{\lambda}_b^g$ . Neben dem (iterativen) Vorgehen bei der ML-Methode wird ein heuristischer Ansatz dargestellt, der sich am Marginalsummenverfahren orientiert.

## (1) ML-Methode

Die Likelihood-Funktion für eine gegebene Stichprobe  $(\vartheta_t, \tilde{n}_{grt})_{r=1, \dots, R; t=1, \dots, T}$  ist hier

$$L(\tilde{\lambda}_a^g, \tilde{\lambda}_b^g, \tilde{\beta}_1^g, \dots, \tilde{\beta}_R^g) = \prod_{t=1}^T \prod_{r=1}^R e^{-(\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g) \cdot \tilde{\beta}_r^g} \cdot \frac{\left( (\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g) \cdot \tilde{\beta}_r^g \right)^{\tilde{n}_{grt}}}{\tilde{n}_{grt}!}.$$

Die partiellen Ableitungen der Log-Likelihood-Funktion liefern  $R+2$  nichtlineare Gleichungen. Normiert man die Regionalfaktoren durch  $\sum_{r=1}^R \tilde{\beta}_r^g = R$ , so ergibt sich nach Nullsetzen der ersten beiden partiellen Ableitungen die folgende Bestimmungsgleichung für  $\tilde{\lambda}_b^g$ :

$$\sum_{t=1}^T \frac{\tilde{n}_{g \cdot t}}{\tilde{n}_{g \cdot \cdot} - \tilde{\lambda}_b^g \cdot T \cdot R \cdot (\bar{\vartheta}_T - \vartheta_t)} = 1,$$

wobei  $\tilde{n}_{g \cdot t} := \sum_{r=1}^R \tilde{n}_{grt}$ ,  $\tilde{n}_{g \cdot \cdot} := \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T \tilde{n}_{grt}$ ,  $\bar{\vartheta}_T := \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T \vartheta_t$ . Gesucht ist eine von 0 verschiedene Lösung  $\tilde{\lambda}_b^g$ . Im Kontext des Klimawandels ist von  $\tilde{\lambda}_b^g > 0$  auszugehen. Lösungen konnten i. d. R. unproblematisch (etwa mit dem Bisektionsverfahren) bestimmt werden. Die verbleibenden Parameter ergeben sich dann mit  $\tilde{n}_{gr \cdot} := \sum_{t=1}^T \tilde{n}_{grt}$  gemäß

$$\tilde{\lambda}_a^g = \frac{\tilde{n}_{g \cdot \cdot}}{T \cdot R} - \tilde{\lambda}_b^g \cdot \bar{\vartheta}_T, \quad \tilde{\beta}_r^g = \frac{\tilde{n}_{gr \cdot}}{T \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \bar{\vartheta}_T \cdot \tilde{\lambda}_b^g)}, r = 1, \dots, R.$$

## (2) Heuristischer Ansatz: Orientierung an dem Marginalsummenverfahren

Hier wird für jede versicherte Gefahr  $g = 1, \dots, G$  - losgelöst von einem Verteilungsansatz - vorab das Marginalsummenverfahren (MSV) eingesetzt, um die Einflüsse der Regionen und des KWI multiplikativ und geglättet zu quantifizieren. Es wurden identische Volumenmaße  $v_{rt}^g = 1$  verwendet, man könnte allerdings auch die Regionen und/oder Jahre unterschiedlich gewichten. Man erhält so - neben dem gewichteten Kollektivmittel  $\bar{s}_g$  (der Anzahlen der Kumulereignisse in Jahr und Region) - normierte Marginalfaktoren  $\hat{\beta}_r^g, r = 1, \dots, R$  sowie  $\hat{A}_t^g, t = 1, \dots, T$  für die  $T$  Beobachtungsjahre des KWI. Letztere korrespondieren nun mit den Ausprägungen  $\vartheta_t, t = 1, \dots, T$ , also nicht mit der Zeit  $T$  selbst. Zwecks Quantifizierung des als linear unterstellten Klimateffekts werden die Beobachtungspaare  $(\vartheta_t, \hat{A}_t^g), t = 1, \dots, T$ , an eine lineare Regression angepasst. Mit dem resultierenden Achsenabschnitt  $\hat{A}_a^g$  und der Steigung  $\hat{A}_b^g$  ergeben sich die folgenden Schätzer für die künftigen Anzahlen der Kumulereignisse bei Vorliegen der Realisierung  $\Theta_t = \vartheta_t$ , nämlich:

$$\bar{s}_g \cdot (\hat{A}_a^g + \vartheta_t \cdot \hat{A}_b^g) \cdot \hat{\beta}_r^g \quad \text{mit Normierung} \quad \sum_{r=1}^R \frac{v_r^g}{v_{\cdot \cdot}^g} \cdot \hat{\beta}_r^g = 1 = \sum_{t=1}^T \frac{v_{\cdot t}^g}{v_{\cdot \cdot}^g} \cdot \hat{A}_t^g.$$

Dieser verteilungsfreie Ansatz wird zur Grundlage einer (auch für die Zwecke der Simulation notwendigen) konkreten Verteilungsannahme. Da wir von (bedingten) Poisson-Verteilungen ausgehen, gehen diese Schätzer in die Poisson-Parameter über:

$$\tilde{\lambda}_{grt} = \tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g) \stackrel{!}{=} \bar{s}_g \cdot (\hat{A}_a^g + \vartheta_t \cdot \hat{A}_b^g) \cdot \hat{\beta}_r^g,$$

$$\text{d. h. } \hat{\tilde{\lambda}}_a^g := \bar{s}_g \cdot \hat{A}_a^g, \quad \hat{\tilde{\lambda}}_b^g := \bar{s}_g \cdot \hat{A}_b^g.$$

I. d. R. wird man bei dem MSV bei der Anpassung an Schadenanzahlen - im Gegensatz zu dem Vorgehen bei Schadendurchschnitten - keine Volumenmaße benötigen bzw. identische Volumengewichte (=1) verwenden.

### 2.4.3 Parameterschätzung bei der Anzahl der Einzelschäden im Bestand

Die Anzahlen der Einzelschäden  $N_{grt}$  im Bestand, gegeben  $\Theta_t = \vartheta_t$ , unterliegen gemäß Abschnitt 2.2.4 einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung  $CP(\tilde{\lambda}_{grt}; \pi(\lambda_{grt}^M))$ . Während die Schätzung des Parameters  $\tilde{\lambda}_{grt}$  wie in Abschnitt 2.4.2 beschrieben unabhängig vom Bestand erfolgte, ist für den bestandspezifischen Parameter

$$\lambda_{grt}^M := \beta_r^g \cdot (\lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g)$$

die Schätzung der Größen  $\beta_1^g, \dots, \beta_R^g, \lambda_a^g, \lambda_b^g$  nötig. Dies erfolgt hier durch sehr heuristische Ansätze, die die Größe des Bestands zu berücksichtigen haben. Zunächst werden Schätzer für die Anzahlen der Risiken im Markt (= Deutschland) benötigt. Es sei

$$\hat{n}_{gr}^{\text{ges}} := (\text{Schätzer für Anzahl der Risiken im Markt bzgl. Gefahr } g \text{ in Region } r).$$

Diese Schätzer können etwa aus den GDV-Daten, vgl. [1] und [2], abgeleitet werden. Weiter seien:

$$\hat{n}_{gr} := (\text{Schätzer für Anzahl der Risiken im Bestand bzgl. Gefahr } g \text{ in Region } r).$$

Beide Schätzer werden vereinfachend als konstant in der Zeit angenommen. Durch die Verhältnisse der beiden Schätzer der Anzahlen der Risiken im Bestand im Verhältnis zum Markt ergeben sich (näherungsweise) Marktanteile, die für weitere Hochrechnungen verwendet werden.

$$\widehat{MA}_{gr} := \frac{\hat{n}_{gr}}{\hat{n}_{gr}^{\text{ges}}}.$$

Diese Anzahlen bzw. Marktanteile haben noch keinerlei Bezug zu Schadenanzahlen. Dies erfolgt nun, indem - analog zu der Technik bei den Anzahlen der Kumulereignisse - ein am MSV orientierter Ansatz umgesetzt wird. Dazu sind im ersten Schritt Proxies für Schadenanzahlen im gesamten Markt für die  $R$  Regionen und für vergangene Jahre - z. B. aus GDV-Daten - abzuleiten. Mit dem MSV werden diesen Schadenanzahlen des Marktes Marginalfaktoren  $\beta_r^g, r = 1, \dots, R$ , für die (zeitunabhängigen) Regionaleffekte und zeitabhängige Marginalfaktoren  $A_t^g, t = 1, \dots, T$  zugeordnet. Erstere können direkt verwendet werden; die Marginalfaktoren  $A_t^g$  werden wiederum mit Hilfe eines linearen Regressionsansatzes

$$A_t^g \approx \hat{A}_t^g := \lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g$$

geglättet. Hier ergaben sich mitunter in der Zeit fallende (!) Tendenzen, d. h. negative  $\lambda_b^g$ . In solchen Fällen empfiehlt es sich auf zeitkonstante Ansätze überzugehen. In Verbindung mit den Proxies für die Marktanteile liegen somit für jede versicherte Gefahr, jede Region und jedes Jahr die folgenden Proxies für die Schadenanzahlen im Bestand vor:

$$\beta_r^g \cdot (\lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g) \cdot \widehat{MA}_{gr}.$$

An diesen Näherungen der Gesamtanzahl der Einzelschäden  $N_{grt}$  im Bestand wird nun die Parameterschätzung ausgerichtet. Hier gilt für den unbedingten a priori-Erwartungswert

$$E[N_{grt}] = E[E[N_{grt}|\Theta_t]] = E[\tilde{\lambda}_{grt} \cdot \lambda_{grt}^M] = \lambda_{grt}^M \cdot E[\tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \Theta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g)] = \lambda_{grt}^M \cdot E[\tilde{N}_{grt}].$$

Der noch offene Parameter  $\lambda_{grt}^M$  wird nun derart geschätzt, dass der (von  $\Theta_t$  unabhängige) a priori-Erwartungswert mit den oben hergeleiteten Proxies übereinstimmt, d. h. man setzt:

$$\hat{\lambda}_{grt}^M := \frac{\beta_r^g \cdot (\lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g) \cdot \widehat{MA}_{gr}}{E[\tilde{N}_{grt}]}$$

Mit den Erwartungswerten der Anzahlen der Kumulereignisse

$$E[\tilde{N}_{grt}] = \tilde{\beta}_r^g \cdot \left( \tilde{\lambda}_a^g + \tilde{\lambda}_b^g \cdot \left( c_t + \frac{\beta_t}{\alpha} \right) \right)$$

ergeben sich explizite Darstellungen für die Parameter  $\hat{\lambda}_{grt}^M$ . Für gegebene Realisierungen  $\tilde{n}_{grt}$  der Anzahlen der Kumulereignisse werden Realisierungen der Gesamtanzahl  $N_{grt}$  durch Simulationen der Poisson-Verteilung  $\pi(\tilde{n}_{grt} \cdot \hat{\lambda}_{grt}^M)$  generiert. Im Mittel fällt die Modellierung der Anzahlen der Kumulereignisse nicht maßgeblich ins Gewicht, da in den Poisson-Parameter der Faktor

$$\frac{\tilde{n}_{grt}}{E[\tilde{N}_{grt}]}$$

einght. Tatsächlich prägt somit die Varianz der Anzahl der Kumulereignisse diesen Modellansatz.

#### 2.4.4 Parameterschätzung bei den Einzelschadenhöhen im Bestand

Die Einzelschadenhöhen im Bestand, gegeben  $\Theta_t = \vartheta_t$ , werden als verschoben gamma-verteilt angenommen, vgl. Abschnitt 2.2.5. Die hier vorliegende Komplexität legt erneut heuristische Ansätze der Parameterschätzung nahe. Die Parameter selbst werden dabei i. d. R. nicht linear in  $\vartheta_t$  sein, wohl aber die ersten drei Momente, insbesondere die Erwartungswerte.

##### (1) Vorgabe KWI-linearer Momente

Bei diesem Ansatz werden die ersten drei Momente, genauer die Erwartungswerte, die Varianzen bzw. alternativ die Standardabweichungen, und die Schiefen linear in  $\vartheta_t$  vorgegeben. Genauer gelte für  $g = 1, \dots, G, r = 1, \dots, R, t = 1, 2, \dots, T$ :

$$E[X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t] =: \mu_{grt} = \beta_{gr}^\mu \cdot (\mu_a^g + \mu_b^g \cdot \vartheta_t)$$

$$V[X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t] =: \sigma_{grt}^2 = \beta_{gr}^\sigma \cdot (\sigma_a^{2g} + \sigma_b^{2g} \cdot \vartheta_t)$$

bzw.

$$\sqrt{V[X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t]} =: \sigma_{grt} = \beta_{gr}^\sigma \cdot (\sigma_a^g + \sigma_b^g \cdot \vartheta_t)$$

$$\gamma[X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t] =: \gamma_{grt} = \beta_{gr}^\gamma \cdot (\gamma_a^g + \gamma_b^g \cdot \vartheta_t)$$

Für jedes Moment sind also die  $R$  Regionalfaktoren sowie die Abszisse und die Steigung des linearen KWI-Effekts vorzugeben. Als besonders vorteilhaft erweist es sich hier, dass die verschobene Gamma-Verteilungen für (vor-)gegebene erste drei Momente (mit positiver Schiefe) eine eindeutige explizite Parametrisierung aufweist. Konkret ergeben sich bei der Momentenmethode die folgenden nicht-linear von  $\vartheta_t$  abhängigen Verteilungsparameter:

$$\hat{\beta}_{gr\vartheta_t}^X := \frac{4}{\gamma_{grt}^2} > 0, \hat{\alpha}_{gr\vartheta_t}^X := \frac{\sqrt{\hat{\beta}_{gr\vartheta_t}^X}}{\sqrt{\sigma_{grt}^2}} \text{ bzw. } \hat{\alpha}_{gr\vartheta_t}^X := \frac{\sqrt{\hat{\beta}_{gr\vartheta_t}^X}}{\sigma_{grt}}, \hat{c}_{gr\vartheta_t}^X := \mu_{grt} - \frac{\hat{\beta}_{gr\vartheta_t}^X}{\hat{\alpha}_{gr\vartheta_t}^X}.$$

Hier ergibt sich im Übrigen, dass für den Fall, dass sowohl Varianzen bzw. Standardabweichungen als auch Schiefen als KWI-unabhängig angesetzt werden, was  $\sigma_b^{2g}$  (bzw.  $\sigma_b^g$ ) = 0 =  $\gamma_b^g$  entspricht, lediglich der Translationsparameter  $\hat{c}_{gr\vartheta_t}^X$  von  $\vartheta_t$  abhängig ist.

##### (2) Heuristischer Ansatz: Orientierung an dem Marginalsummenverfahren

Analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 2.4.2 (2) kann auch hier für die Parameterschätzung das MSV eingesetzt werden, indem die Einflüsse der Regionen und des KWI - getrennt nach den ersten Momenten der Einzelschadenhöhen - multiplikativ und geglättet quantifiziert werden. Es wird unterstellt, dass als Datenbasis für jede versicherte Gefahr  $g$ , jede Region  $r$  und für gegebene Realisierungen  $\vartheta_t, t = 1, \dots, T$  des KWI

- Arithmetische Mittelwerte („Schadendurchschnitte“)  $\bar{x}_{grt}$ ,
- Stichprobenvarianzen  $s_{grt}^2$  bzw. Stichprobenstandardabweichungen  $s_{grt}$  und
- Stichprobenschiefen  $\gamma_{grt}$

vorliegen. Die Volumenmaße  $v_{rt}^g$  werden hier - im Gegensatz zu 2.4.2 (2) - nicht trivial bzw. identisch gewählt. Vielmehr bieten sich hier die den Schadendaten zugrundeliegenden Stichprobenumfänge, also die Schadenanzahlen, an.

Das Vorgehen für die drei Momente ist methodisch identisch. Es wird nachfolgend exemplarisch für die Erwartungswerte dargestellt. Im ersten Schritt werden auf Basis der vorliegenden Schadendurchschnitte  $\bar{x}_{grt}$  und der Volumenmaße, nämlich der Schadenanzahlen  $v_{grt} = n_{grt}$  (bzw. deren Proxies), für jede (feste) Gefahr  $g$  das MSV mit den beiden Merkmale Region und KWI angewendet. Zunächst wird das gewichtete Kollektivmittel

$$\bar{s}_g = \frac{s_{\bullet\bullet}^g}{n_{\bullet\bullet}^g} = \frac{\sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T n_{grt} \cdot \bar{x}_{grt}}{\sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T n_{grt}}$$

berechnet. Das MSV generiert dann als Grenzwerte einer Iteration nicht-normierte (von  $\vartheta_t$  unabhängige) Marginalfaktoren  $\hat{\beta}_{gr}^{\infty\mu}, r = 1, \dots, R$  für die Regionen sowie (nicht-normierte) (von der Region  $r$  unabhängige) Marginalfaktoren  $\hat{A}_{gt}^{\infty\mu}, t = 1, \dots, T$ , für die  $T$  Beobachtungsjahre des KWI. Diese Grenzwerte werden durch den Übergang auf

$$\hat{\beta}_{gr}^{\mu} := \frac{\hat{\beta}_{gr}^{\infty\mu}}{\sum_{i=1}^R \frac{n_{gi\bullet}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{\beta}_{gi}^{\infty\mu}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{A}_{gt}^{\mu} := \frac{\hat{A}_{gt}^{\infty\mu}}{\sum_{j=1}^T \frac{n_{g\bullet j}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{A}_{gj}^{\infty\mu}}$$

normiert. Es gilt dann  $\sum_{r=1}^R \frac{n_{gr\bullet}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{\beta}_{gr}^{\mu} = 1 = \sum_{t=1}^T \frac{n_{g\bullet t}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{A}_{gt}^{\mu}$ . Diese Normierung wird in dem

### Normwert

$$NW_g^{\mu} := \left( \sum_{r=1}^R \frac{n_{gr\bullet}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{\beta}_{gr}^{\infty\mu} \right) \cdot \left( \sum_{t=1}^T \frac{n_{g\bullet t}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{A}_{gt}^{\infty\mu} \right)$$

erfasst. Es gilt dann

$$\hat{\beta}_{gr}^{\infty\mu} \cdot \hat{A}_{gt}^{\infty\mu} = NW_g^{\mu} \cdot \hat{\beta}_{gr}^{\mu} \cdot \hat{A}_{gt}^{\mu}.$$

Zwecks Quantifizierung des als linear unterstellten Klimaeffekts werden im zweiten Schritt die Beobachtungspaare

$$(\vartheta_t, \hat{A}_{gt}^{\mu}), t = 1, \dots, T$$

an eine lineare Regression angepasst. Mit dem resultierenden Achsenabschnitt  $\hat{A}_a^{\mu g}$  und der Steigung  $\hat{A}_b^{\mu g}$  ergeben sich die folgenden Schätzer für die linearisierten Erwartungswerte der Einzelschadenhöhen bei Gefahr  $g$ , in Region  $r$  und bei Vorliegen der Realisierung  $\Theta_t = \vartheta_t$ :

$$\bar{s}_g \cdot (\hat{A}_a^{\mu g} + \vartheta_t \cdot \hat{A}_b^{\mu g}) \cdot \hat{\beta}_{gr}^{\mu} \cdot NW_g^{\mu}.$$

Passt man die modellierten Erwartungswerte im Sinne der Momentenmethode an diese Näherungen an, so übernimmt man naheliegender Weise die normierten Marginalfaktoren  $\hat{\beta}_{gr}^{\mu}$  für die Regionen und erhält weiter:

$$\hat{\mu}_a^g := \bar{s}_g \cdot \hat{A}_a^{\mu g} \cdot NW_g^\mu, \quad \hat{\mu}_b^g := \bar{s}_g \cdot \hat{A}_b^{\mu g} \cdot NW_g^\mu.$$

Die folgende Grafik illustriert (exemplarisch für die Gefahr Starkregen) den Verlauf der geglätteten und nicht geglätteten Marginalfaktoren der KWI-Effekte. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass diese Marginalfaktoren nicht linear in der Zeit, sondern linear in dem KWI modelliert sind. Letzterer weist aber gemäß den Modellannahmen zeitlineare Erwartungswerte auf.

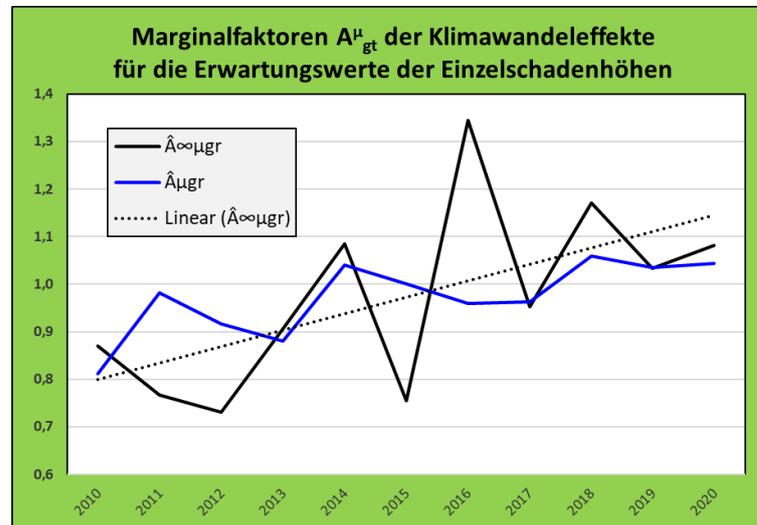


Abbildung 5: Marginalfaktoren der Klimawandeleffekte für Erwartungswerte der Einzelschadenhöhen, WGV, Starkregen, 2010-2020

Für die Varianzen bzw. Standardabweichungen und Schiefen ist formal das gleiche Vorgehen durchzuführen. Es stellt sich aber die Frage, inwieweit Varianzen und Schiefen so „fein“ modelliert werden sollten. Man kann es sicher vertreten, zumindest KWI-unabhängige Varianzen und Schiefen anzusetzen, vielleicht sogar überregional. In den Anwendungen (Simulationen) wurde bislang vorzugsweise das MSV für die Erwartungswerte herangezogen, diese Schätzer dann für die KWI-lineare Momentenvorgabe verwendet und auch (meist konstant) Varianzen und Schiefen vorgegeben.

## 2.5 Ergebnisse

Nachfolgend werden ausgewählte Auswertungen von Simulationen sowie analytische Erkenntnisse der Modellbildung angesprochen.

### 2.5.1 Auswertung von Simulationen

Mit den Modellbildungen aus Abschnitt 2.2 können potenziell alle Zufallsvariablen weitgehend problemlos simuliert werden. Im Fokus stehen insbesondere Gesamtschadenvariablen, vornehmlich im Rahmen des Risikomanagements. Nachfolgend wird der Gesamtschaden für eine versicherte Gefahr (hier: Starkregen) betrachtet und dabei auf den Vergleich zwischen C-Modellen und T-Modellen eingegangen, also insbesondere auf die Unterschiede zwischen zufälligen Klimaeffekten (KWI  $\theta_t$ ) und deterministischen Effekten ( $T$ ).

Ohne auf die Details der konkreten Modellkalibrierung, etwa die verwendeten Varianten der Parameterschätzungen, näher einzugehen, werden in der nachfolgenden Grafik je 100 simulierte 10-Jahres-Pfade der Reserveverläufe für ein T-Modell (links) bzw. ein C-Modell (rechts) dargestellt. Es wurden Prämien inkl. eines Sicherheitszuschlag von 15 % der Erwartungswerte sowie eine Anfangsreserve von 100.000 EUR (ca. 5-7 % der erwarteten Gesamtschäden) unterstellt. Das C-Modell operiert mit dem KWI der mittleren Tagestemperaturen. Hier wurden jährliche Gesamtschäden für lediglich eine versicherte Gefahr (Starkregen), aber kumuliert über die vier Regionen betrachtet.

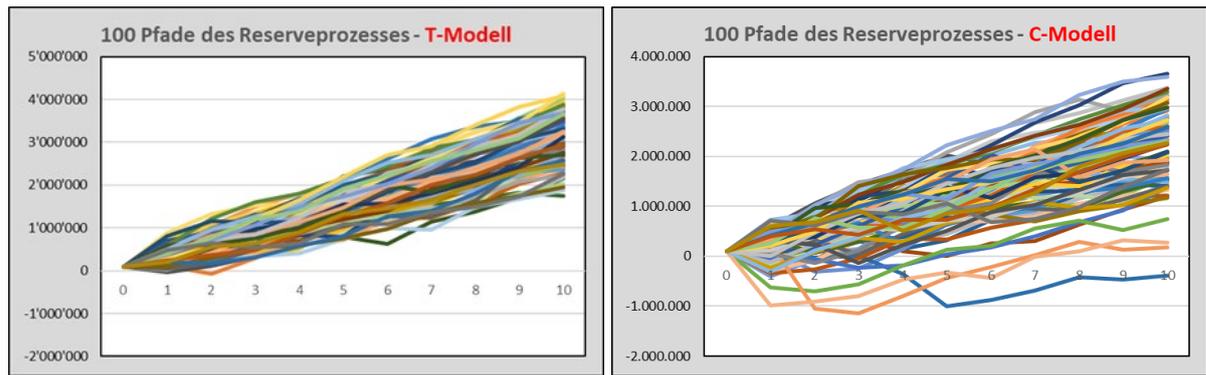


Abbildung 6: 100 simulierte 10-Jahres-Verläufe der Reserven, WGV für Starkregen, Gesamtschäden für 4 Regionen

Bei allen Vorbehalten zu der Aussagekraft einzelner Modellanwendungen ist doch festzustellen, dass erwartungsgemäß die Variabilität und damit die Verlust- und Ruingefahr in den C-Modellen signifikant höher erscheint. Die folgende Tabelle quantifiziert die relativen Häufigkeiten technischer Verluste (Reserve < Anfangsreserve) bzw. technischer Ruine (Reserve < 0) bei je 1000 simulierten Pfaden, unterschieden nach den beiden Modellen.

Relative Häufigkeit	Modell	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	Jahr 7	Jahr 8	Jahr 9	Jahr 10
technischer Verlust	T	3,9%	0,6%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	C	20,0%	13,7%	9,0%	6,6%	4,0%	2,9%	1,9%	0,9%	0,5%	0,3%
technischer Ruin	T	0,9%	0,1%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	C	13,1%	9,9%	7,0%	4,5%	2,9%	2,1%	1,5%	0,6%	0,2%	0,2%

Tabelle 1: Relative Häufigkeiten technischer Verluste bzw. Ruine bei 1000 simulierten 10-Jahres-Verläufe der Reserven, T- vs. C-Modell

Insbesondere hinsichtlich der Bewertung der Ruingefahr ergeben sich offenbar bei Ansatz der C-Modelle drastisch höhere Häufigkeiten.

## 2.5.2 Analytische Ergebnisse

Die Herleitung analytischer Erkenntnisse erweist sich in den C-Modellen wegen der Abhängigkeit nahezu sämtlicher Zufallsvariablen von dem KWI  $\theta$  als sehr aufwendig. Während die Erwartungswerte noch problemlos zu berechnen sind, gehen in die Varianzen der Gesamtschäden diverse Kovarianzen und die bekannte **Varianzzerlegung**

$$V[Y] = E[V[Y|\theta]] + V[E[Y|\theta]],$$

vgl. [6], S. 470, ein. Für die absoluten Schiefen (= 3. zentralen Momente) gilt eine ähnliche Zerlegung, nämlich

$$\bar{m}_3[Y] = \gamma_{\text{abs}}[Y] = E[\bar{m}_3[Y|\theta]] + \bar{m}_3[E[Y|\theta]] + 3 \cdot \text{Cov}[E[Y|\theta], V[Y|\theta]],$$

was sich als Spezialfall des sogenannten *law of total cumulance*, vgl. [10], ergibt. Da sich auch die absoluten Schiefen von Summen abhängiger Zufallsvariablen neben der Summe der einzelnen Schiefen als Summe von Kovarianzen berechnen lassen, sind die ersten drei Momente der Gesamtschäden in den C-Modellen exakt und explizit berechenbar. Somit können für die auftretenden Gesamtschäden auch Approximationen mit verschobenen Gamma-Verteilungen problemlos angewendet werden. Die folgende Abbildung illustriert eine solche Approximation, auch im Vergleich zu einer Normal- und einer Normal-Power-Approximation, vgl. [6], S. 457 ff. Der Gesamtschaden bezieht sich wiederum auf nur eine Gefahr und vier Regionen.

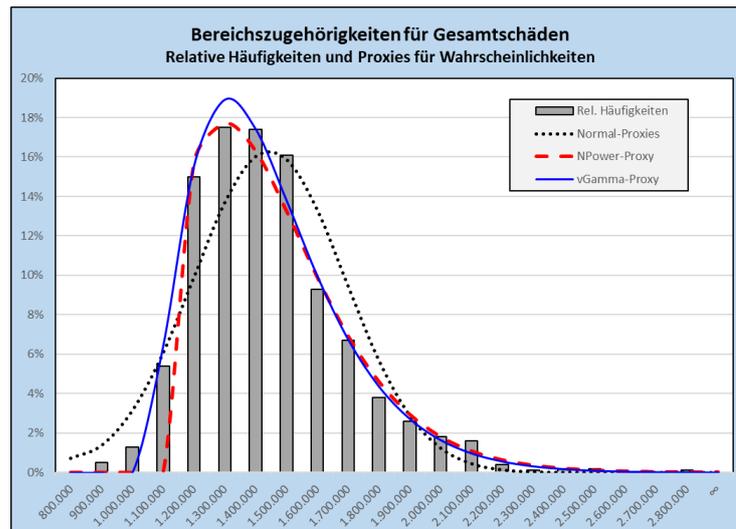


Abbildung 7: Dichte-Approximationen für Gesamtschäden und (simulierte) relative Häufigkeiten (WGV, Starkregen, 4 Regionen)

Mit der verschobenen Gamma-Verteilung liegt offenbar ein handliches Instrument zur fundierten Bewertung der Risikogebenenheiten vor.

## 2.6 Literaturverzeichnis

- [1] GDV (Hrsg.): *Naturgefahrenreport 2021 - Serviceteil*. 2021.
- [2] GDV (Hrsg.): *Naturgefahrenreport 2022 - Serviceteil*. 2022.
- [3] <https://actuariesclimateindex.org/home/>. 2023.
- [4] Kreiß, J.-P., Neuhaus, G.: *Einführung in die Zeitreihenanalyse*, Springer, 2006.
- [5] DWD: Climate Data Center (CDC) Portal v2.1; [https://www.dwd.de/DE/klimaumwelt/cdc/cdc\\_node.html](https://www.dwd.de/DE/klimaumwelt/cdc/cdc_node.html). 2022.
- [6] Goelden, H.-W., Hess, K. Th., Morlock, M., Schmidt, K. D., Schröter, K. J.: *Schadenversicherungsmathematik*. 2. Auflage, Springer, 2024.
- [7] Heilmann, W.-R., Schröter, K. J.: *Grundbegriffe der Risikotheorie*, 2. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft, 2014.
- [8] DWD: *Climate Data Center (CDC) Portal v2.1*; [https://www.dwd.de/DE/klimaumwelt/cdc/cdc\\_node.html](https://www.dwd.de/DE/klimaumwelt/cdc/cdc_node.html). 2022.
- [9] Klugman, St. A., Panjer, H.H., Willmot, G.E.: *Loss Models – From Data to Decisions*. 3. Auflage, Wiley, 2008.
- [10] Brillinger, D.: *The calculation of cumulants via conditioning*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. 21 (1969), pp. 215-218.

## 3. Dokumentationen, Publikationen, Vorträge:

Die in der AG *Klimawandel* erzielten Ergebnisse werden fortlaufend, allerdings je nach Inhalt auf sehr unterschiedliche Weise und in unterschiedlichen Medien veröffentlicht. Meine Arbeiten waren vornehmlich auf die Modellierung ausgerichtet. Die zugehörigen **UAG-internen Dokumentationen** waren sehr umfangreich und wurden von mir noch in 3 Versionen unterschieden:

- *Versicherungstechnische Modellierung der Einflüsse des Klimawandels auf die Schadenversicherung* - Interne Gesamtdokumentation. 160 Seiten.
- *Versicherungstechnische Modellierung der Einflüsse des Klimawandels auf die Schadenversicherung* - Ergebnisorientierte Dokumentation. 86 Seiten.

- *Modellierung und Simulation von Gesamtschäden in Bayesschen Klima-Modellen – Benutzerhandbuch. 31 Seiten.*

Die **Gesamtdokumentation** zeichnet sich durch einen sehr hohen Detaillierungsgrad aus und umfasst nahezu alle Aspekte der mathematischen Modellierung. Die **ergebnisorientierte Dokumentation** geht durch Kürzung aus der ersten hervor, indem Beweise nahezu vollständig weggelassen wurden und sich auf die Ergebnisse konzentriert wurde. Als Hilfestellung für die potenzielle Anwendung der Modelle wurde außerdem ein **Benutzerhandtuch** erstellt, das den späteren Usern ein Kurzeinstieg in das Modell sowie eine Einführung die selbst vorzunehmende Modellkalibrierung vermittelt.

Zusätzlich zu diesen internen Dokumentationen berichtet der Leiter der AG, aktuell Herr Prof. Dr. Michael Schüte, regelmäßig dem DAV-Vorstand über die Fortschritte in der AG. Neben diesen DAV-internen Berichten und Dokumentationen gab und gibt es natürlich einige weitere externe Veröffentlichungen bzw. Vorträge, an denen ich maßgeblich mitgewirkt habe. Im Einzelnen waren dies:

- Vortrag (Stephanie Köneke, Benedikt Funke) auf der Herbsttagung der Dt. ASTIN-Gruppe, 15.11.2022, Mainz: *Quantifizierung ausgewählter Einflüsse des Klimawandels auf die Schadenversicherung*
- Vortrag (Benedikt Funke) auf dem Weltkongress der Versicherungsmathematiker (International Congress of Actuaries 2023), 1.6.2023, Sydney (online): *Approaches for Integrating Climate Change Effects into Dynamic Claim Size Models*
  - mit gemeinsamen Paper für den Tagungswettbewerb
- Vortrag (Benedikt Funke) auf dem 18. FaRis & DAV-Symposium, 8.12.2023, Köln: *Modellierung und Absicherung von Naturgefahren*
- *Modelle zur Quantifizierung des Klimawandels, DAV-Journal, 2024 (Artikel zusammen mit Benedikt Funke; eingereicht)*

Zweibrücken, 17.1.2024

Klaus J. Schröter